研究論文

関係の推理と量的推理：割合概念の場合[1)]

吉　田　　　甫[2)]

Inference of relation and inference of quantity: The case of ratio concepts

YOSHIDA Hajime

The purpose of this study was to examine development between inference of relation and quantity by revising methodological problems observed in previous studies. 139 fifth graders of elementary schools were given three equations in ratio concepts. In order to investigate inference of relation in ratio concepts, they were given judgement tasks on order between compare and base quantities and on relation between compare quantity and ratio. Then, they were asked to select one of alternatives after been given ratio problems. As results, pupils in the problem situation under 100 percentage indicated correct percentages in inference of relation task about two times compared to inference of quantity task. In the problem situation over 100 percentage similar results were obtained. Further we found that most frequently incorrectly selected equation was small number ÷ bigger one. In the second equation, most of pupils selected division type although the correct equation was multiplication. In the third equation, almost all of pupils selected multiplication type.

Key words：inference of relation, quantity inference, ratio, strategy
キーワード：関係の推理，量的推理，割合，方略

文章題における問題解決においては，一般に量的な解決がもっとも重要であると見なされている。一般的に同意されている解決の過程として，４つのステップがあると仮定されている。それは，まず与えられた問題を内的な表象に変換し，それらの表象間の関連を確立し，つぎにプランニングをおこなって正確に計算し，答を求めるという過程である（Mayer, 1985)。これらの過程の中では，問題を内的な表象に変換し，表象間の関係を同定するという２つが，子どもにとってはとくに理解することが困難な過程である。

いずれにしろ，広く受け入れられているこの問題解決の過程は，量的な解決に至る過程である。問題解決においては，量的に正確に解決することはきわめて重要であり，子どもにはそうした解決が求められている。この解決が子どもにとってやさしいものであれば，量的な解決を押し進めることで十分であろう。しかし現実には，この種の問題解決は，とくに学年が上がるにしたがって困難になる。たとえば，分数，比例，割合などは，小学校では子どもにとって解決することがもっとも困難な課題である。

こうした課題が子どもにとってなぜ難しいかを研究するさいに，どのようなアプローチが有

1）本研究は，文部科学省の科学研究費(No. 12610135)による援助を受けた。
2）立命館大学文学部

効な枠組みになるだろう。いくつかの枠組みが考えられる。第１のアプローチは，インフォーマルな知識を明らかにすることであろう。第２の方向は，学習中の障害が何かを明らかにすることである。第３のアプローチは，第１とも関連するが，量的な解決を理解する以前に関係の推理が獲得されているかどうかを明らかにすることである。第１と２のアプローチが有効であることは，これまでの研究によって確認されている（De Corte et al., 1996；Fuson, 1988；Mack, 1993；吉田，1999；Yoshida & Shinmachi, 1999；吉田ら，2000）。

第３のアプローチは，最近，Nunes & Bryant（1996）によって提案されたものである。彼らは，さまざまな研究を概観して，量的な推理による解決に先立って関係の推理による解決が発達していることを示唆している。たとえば，１対１対応を主な概念とした研究や関数関係を概念として取りあげた研究において，いずれの概念でも関係の理解が量的な理解よりも先行して発達していると報告している。

しかし，彼らの報告にはやや疑問が残る。彼らは，関係の推理と量的な推理を比較する研究を引用するさいに，まったく異なる研究を比較している。つまり，対象になった子どもも使用された課題も，いずれも異なっている。たとえば，関数関係についての関係の推理と量的な推理とを考察するさいに，関係の推理を示す研究としてSpinillo & Bryant（1991）を引用している。この研究で対象になった子どもは，５歳から８歳までの年齢であり，用いられた課題は，白と青の煉瓦が所定の比率で示されている２つの箱を提示し，どちらの箱が比率で多いかを判断させている。一方，量的な推理を示す研究としては，Hart（1984）を引用している。この研究では，オニオンスープの問題を13から15歳の子どもに与えている。課題の要求としては，８人分を調理するためのそれぞれの材料の分量が与えられ，４人や６人分を料理するためにはどうすればよいかが質問されている。

こうして，まったく異なる目的で研究された課題を取りあげ，それらを比較することで，先述の結論を引きだしている。しかし課題への要求が異なれば，そこで機能している推理も，当然のように異なってくる。そうした異なる推理過程をもつ研究を比較しても，同じ推理過程をもつ課題であるかどうかは，不明である。そこで，関係の推理と量的な推理を比較するためには，同一の推理過程をもつであろう課題を準備することが必要であろう。そのことによって，機能している推理の内容は同一になるので，関係の推理と量的な推理との発達的な関係を同じ土俵で比較できることになる。

本研究は，割合という同一の課題を利用しさらに同一の学年の子どもを対象にして，この関係について検討する。割合は，よく知られているように，子どもにとってはきわめて難しい概念である。割合の学習をとっくに終えた中学３年生でさえも，割合の第３用法などの問題の正答率は，３割にも満たない低さである（黒木・吉田，1998）。ここでいう正答率とは，量的な推理による解決とほとんど同義であると言ってよい。

割合における関係の推理とは，割合における３つの要素の関係に関わる推理であると定義できる。つまり，基にする量と比べる量との関係，比べる量と割合との関係，基にする量と割合との関係などを指す。そこで，本研究では，こうした関係に対する子どもの理解と量的な推理との関係を検討することを目的とする。

方　法

対象者

割合の学習を終わった小学６年生145人が対象となった。この内，６人のデータが不備のた

め，以後の分析から削除された。

課　題

割合の３用法の課題が用いられた。問題は，それぞれの用法毎に100％以下の問題状況と100％以上の問題状況から構成されている。そのさいに，意味の構造として部分―全体を示すタイプと比較を示すタイプ（Yoshida, 1998）とをそれぞれ作成し，合計12問が準備された。問題は，問題を与えてそれを解決させるという通常の提示方法ではなく，選択肢を準備してそこから適切なものを選択させるという形で解決を求めた。

関係の推理を検討するために，第１用法では求めるべき答である割合が100％より大きくなるか小さくなるかを判断させた。第２用法では，問題中に示してある基にする量と求めるべき答である比べる量との大小を判断させた。第３用法では，問題中に示されている比べる量と求めるべき答である基にする量との大小を判断させた。

量的な推理を検討するための最適な方法は，問題を直接与えて解決させることであろう。しかし，子どもにとって解決することがきわめて難しい割合問題を12問も与えるという方法をとることは，実際的な方法としては調査のための時間という制約のために現実的ではなかった。そこで，選択肢としての式を提示し，適切な式を選択させるという方法をとった。

以下，用法毎に100％以下と以上で使用した問題の例を示す。

第１用法：100％以下，部分―全体
＜ひろし君のクラスには45人います。その内，男子は25人です。男子は，クラス全体の何％でしょう＞
関係の判断：
　①答は，100％より大きくなる
　②答は，100％より小さくなる
　③答は，100％である
　④これだけでは分からない
式の選択；正しいと思う式をどれか１つ選択する
　たし算（45＋25）
　ひき算（45－25）
　かけ算（45×25）
　わり算（45÷25，25÷45）
　問題がおかしいので答を選ぶことができない

第１用法：100％以上，比較
＜とおる君は，時速28kmの速さで自転車をこぎます。まさお君は，時速21kmでこぎます。とおる君は，まさお君の何%の速さで走るでしょう＞
関係の判断：
　①答は，100％より大きくなる
　②答は，100％より小さくなる
　③答は，100％である
　④これだけでは分からない
式の選択
　たし算（28＋21）
　ひき算（28－21）
　かけ算（28×21）
　わり算（28÷21，21÷28）
　問題がおかしいので答を選ぶことができない

第２用法：100％以下，部分―全体
＜あきこさんのクラスには35人います。この内，11月生はクラスの20％になります。11月生は何人いるでしょう＞
関係の判断：
　①クラスの人数より11月生まれの人が多い
　②クラスの人数より11月生まれの人が少ない
　③クラスの人数と11月生まれの人は同じ数だ
　④これだけでは分からない
式の選択

たし算（35＋20，35＋0.2）
ひき算（35－20，35－0.2）
かけ算（35×0.2，35×20）
わり算（20÷35，35÷0.2，35÷20）
問題がおかしいので答を選ぶことができない

第３用法：100％以下，比較
＜まさし君の身長は162cmで，てつや君の身長の95％にあたります。てつや君の身長は何cmでしょう＞

関係の判断：
①てつや君はまさし君より背が高い
②てつや君はまさし君より背が低い
③てつや君とまさし君の背の高さは同じ
④これだけでは分からない

式の選択
たし算（162＋95，9.5＋162）
ひき算（162－95，162－9.5）
かけ算（95×162，162×0.95）
わり算（9.5÷162，162÷0.95，95÷162）
問題がおかしいので答を選ぶことができない

方 法

問題は，用法，意味の構造，100％以上と以下などの要因をすべてランダムにした配置にし，A4の用紙６枚に印刷した。なお，問題の提示順序の効果を可能な限り小さくするために，この順で印刷されたものと問題は同じだが，別の順で印刷された用紙も印刷した。問題は，一斉テストの形式で，通常の算数の授業時間に「練習問題」として生徒に与えられた。

結 果

全体的分析

課題に含められた要因の中で，意味構造の要因には差が認められなかったので，分析に際してそれらは結合された。図１には，100％以下の問題における関係の判断と式の選択における用法毎の正答率が示されている。図から明らかなように，関係の判断の正答率は，第１と２用法では80％前後とかなり高く，第３用法でも55％であった。いずれの用法でも，関係の判断は，式の選択に比べて有意に高い正答率を示した。第１用法では，$t(1)=10.253$，$p<.001$，第２用法では，$t(1)=12.045$，$p<.001$，第３用法では，$t(1)=9.712$，$p<.001$であった。式の選択については，いずれの用法でも正答率は関係の判断に比べれがかなり低下しており，これらは問題を直接に回答した場合に得られる正答率と同等の値である。

100％以上の問題での結果は，図２に示されている。関係の判断については，100％以下で

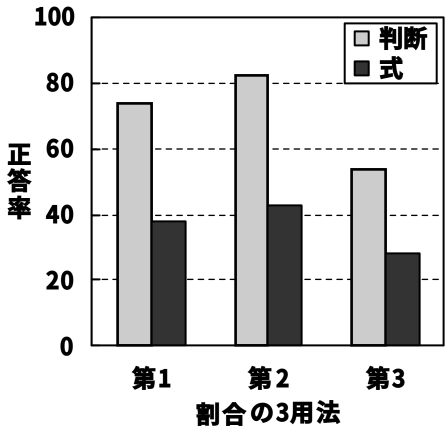

図１.判断と式の選択における正答率：100％以下

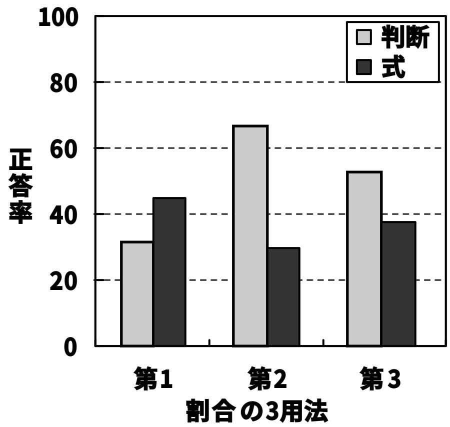

図２.判断と式の選択における正答率：100％以上

のデータに比べれば，かなり低い正答率となった。第２と３用法では，正答率は60％前後である。しかし興味あることに，第１用法での関係の判断は，わずか32％というきわめて低い正答率が得られた。第１用法では，関係の判断が式の選択の正答率よりも低い傾向が見られるが，この傾向は有意ではなかった $t(1)=0.947$。しかし，第２と第３用法では，いずれも関係の判断の正答率が有意に高かった，第２用法では，$t(1)=11.432$，$p<.001$，第３用法では，$t(1)=5.482$，$p<.01$。式の選択については，興味あることに，第３用法の正答率が40％近いというかなり良好な結果が得られた。通常であれば，第２用法がもっとも易しく，ついで第１用法，最後に第３用法という順になるが，それがここではまったく異なる傾向となっていることが分かる。

式の選択の分析

ここでは，用法毎にどのような式が選択されたかの分析をおこなう。生徒は，いくつもある式の中から適切と思われる式を選択したが，正しい選択率は，図１と２に示されている。ここでは誤った選択に焦点をあてて分析をおこなう。そうした分析をおこなうさいに，選択肢としては９種類もあり，これらを別々に分析しても，細かすぎる嫌いがある。そこで本論文では，１つずつの式というよりは演算の種類毎にまとめた分析をおこなう。

図３には，100％以下における第１用法で関係の判断が正しかった113人と誤った26人のそれぞれのグループが，どの式を選んだかその割合を示している。第１用法の問題を適切に解くために利用される演算は，もちろんわり算である。したがって，誤ったわり算での結果は，小さい数÷大きい数の式を選択した子どもの割合を示している。図から一見して分かるように，かけ算，たし算，ひき算といった第１用法と関連しない演算を選んだ生徒は，きわめて少ないことが分かる。関係の判断が正しかろうと誤っていようと，選ばれた式の種類は，圧倒的に小さい数÷大きい数であることは，明らかだ。

図４には，100％以下のタイプにおける第２用法で関係の判断が正しかった121人と誤った13人における式の選択の分布が示されている。ここでも，きわめてはっきりした結果が得られた。第２用法の問題なので，かけ算の式を選ぶべきだが，誤った子どもの大多数は，わり算の式を選んでいる。

また，驚いたことに，関係の判断を誤った子どもでは加法構造の演算であるたし算とひき算を選んだ生徒が，合計すれば31％にも達している。また関係の判断が正しかった生徒の中での11％も，乗法構造の問題に対して加法構造

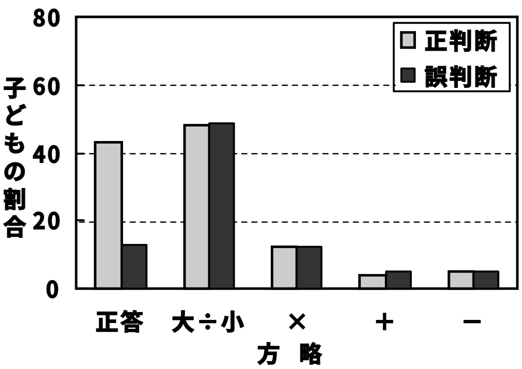

図３.100％以下の問題における式の選択：第１用法

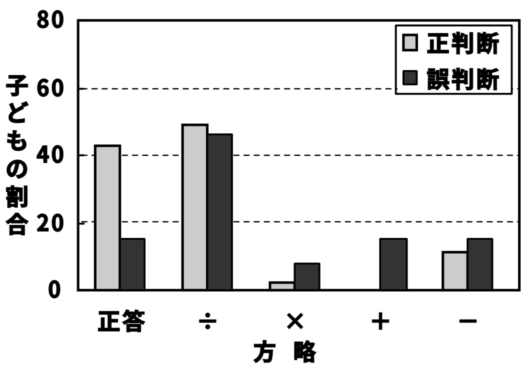

図４.100％以下の問題における式の選択：第２用法

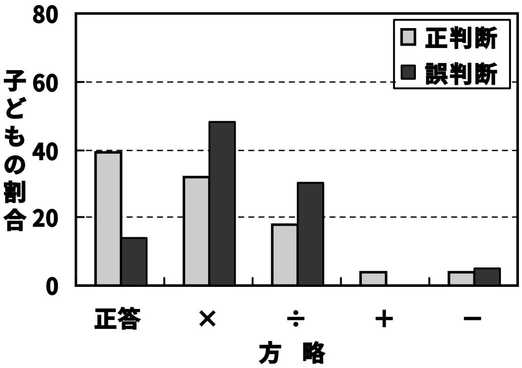

図５.100％以下の問題における式の選択：第３用法

の演算を選択していた。これらの結果は，わり算の基本となる意味がほとんど理解されていないことの反映であろう。

図５には，100％以下のタイプにおける第３用法で関係の判断が正しかった79人と誤った58人における式の選択の分布が示されている。図５は，第１と２用法の傾向とは趣を異にしている。つまり，誤って選択された演算としてもっとも多いのは，かけ算である。しかし，わり算を選んだ生徒も，それについで多いという傾向だ。関係の判断を誤った生徒だけでなく，正しく判断した生徒でも，その傾向は同じである。

次に100％以上の問題における結果に移ろう。図６には，第１用法において関係の判断が正しかった47人と誤った84人の式の選択の割合が示されている。この結果は，100％以下で得られた傾向と類似しており，やはりわり算，とくに小さい数÷大きい数の式が圧倒的に選ばれている。このタイプの問題は，100％をこえるので，正しい式は大きい数÷小さい数である。しかし小さい数÷大きい数を選んだ子どもは，図３で示された100％以下の状況でのみ適用されうる知識を100％以上の状況に適用した子どもと見なされよう。

図７には，第２用法において関係の判断が正しかった99人と誤った40人の式の選択の割合が示されている。ここでも，100％以下の問題で見られた傾向とほぼ類似した結果が得られた。つまり，第２用法の問題はかけ算で解決される問題だが，図からも明らかなように，わり算という別のタイプの演算が誤って選択されていた。

第３用法では，関係の判断が正しかった78人と誤った58人の式の選択の割合が図８に示されている。ここでは，誤った選ばれた演算でもっとも多いのは，かけ算であり，ついでわり算という結果である。これも，100％以下の問題で得られた傾向と類似している。

こうして，100％以下と以上の問題では大きく正答率は異なるものの，生徒が誤って選択した演算のタイプについてはほとんど同じ傾向であることが示された。

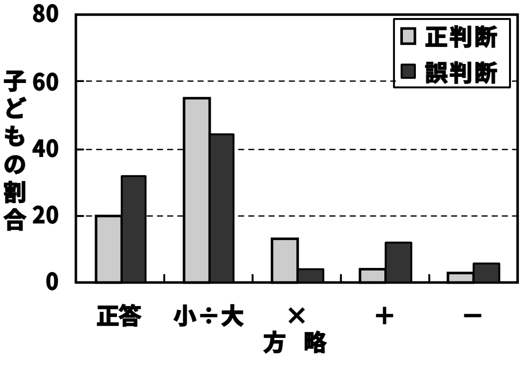

図６.100％以上の問題における式の選択：第１用法

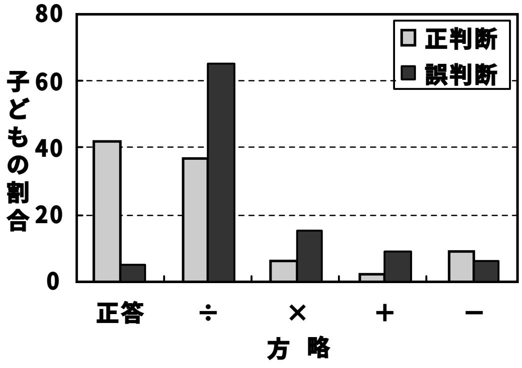

図７.100％以上の問題における式の選択：第２用法

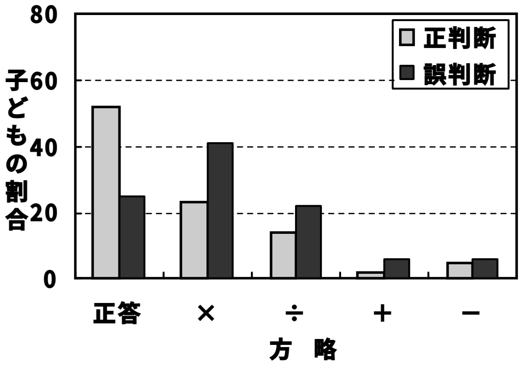

図８.100％以上の問題における式の選択：第３用法

考　察

本研究では，同一の課題を使って関係の推理と量的な推理に関する発達の傾向を検討することが目的であった。その結果，関係の推理は，割合というきわめて困難な概念においてもかなり正確に理解されていることが分かった。それに対し，量的な推理の正答率は関係の推理のそれに比べ半分程度のレベルにある。こうして，100％以下の状況をもつ割合概念において，関係の推理が量的な推理の理解に先行して発達しているということが，示唆された。

割合の指導では，割合＝比べる量÷基にする量という公式が，もっとも中心的な概念であり，子どもは，問題解決においてはこの公式をどのように適用するかを教えられる。そうしたアプローチが，子どもにとっては割合の理解を困難にしている要因であることが，これまでの研究からも示されている（吉田ら，2000）。序論で述べたように，そうした状況を突破するためには，インフォーマルな知識を分析するアプローチや学習中の認知的障害を分析するアプローチが有効である。それに加えて，関係の推理と量的な推理という枠組みも，子どもにとって困難な概念を解析するさいの有効なアプローチとなることが，本研究から示された。こうして，研究の全体的な目的は，実証されたといえる。

ただ本研究では，それ以外にさまざまな興味ある結果が得られている。それらについて，以下考察する。第１には，関係の推理と量的な推理の関係，とくに，図２に示されているように，100％をこえる問題状況における第１用法の結果が，他の結果とまったく異なっている。100％以下の問題では，関係の判断は74％という高い正答率であるのに対し，100％以上の問題ではわずか32％とすべての関係の判断の中で最低の正答率である。

この結果は，100％をこえる問題状況を％で表現することが，子どもにとってはかなり異例なことであることを示唆している。つまり，日常言語では，100％以上を表現するさいには，％ではなく倍の表現が用いられる。日常表現と大きく異なる状況を子どもが理解することの困難さを反映していると考えられる。日常表現と割合を表す％や小数倍との関係については，今後解決すべきテーマの１つだろう。

次に，誤って選択された演算の結果を考察する。100％以下であろうと以上であろうと，誤って選択された式にはかなりの一貫性が見られた。このことは，子どもは，ランダムに式を選択しているのではないことを示唆している。第１用法で誤って選択されているわり算，とくに大きい数÷小さい数という式を解釈することは，容易である。つまり，子どもにとってのわり算とは，部分―全体の知識から考えるものであり，それは全体を等分割するという意味をもつ。つまり，子どもがもっている既有知識（吉田，1991）にしたがった選択である。それであれば，わり算の式として割合を求めるときのように小さい数÷大きい数という式を選択することは，かなり困難であることになる。

それでは，第２用法では，なぜわり算が選択されるのであろうか。これについては，割合の要素である基にする量や比べる量といった要素

を子どもが同定できないという結果（吉田・河野，1999）が，参考になるだろう。この研究では，子どもは第２用法の問題を比べる量を求める問題としてではなく，基にする量を求める問題として捉えていることが示されている。第２用法を基にする量と求めると考えることは，それはある意味で第３用法を求めることであるし, 演算としてみればわり算として解決できる。このために，第２用法でわり算が誤って選択されるのではないかと考察される。

次に，第３用法を考察しよう。第３用法におけるもっとも多く誤って選択される演算は，かけ算である。吉田・河野（1999）によれば，子どもは第３用法の問題を第２用法の問題と誤って捉えていることが示されている。つまり，第２用法と捉えるならば，それはかけ算として解決できる問題である。ここから子どもは，かけ算を誤って選択している可能性が強い。これらの考察については，しかし，さらなる確認が必要である。

文　献

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. 1996 Mathematics teaching and learning. In Berliner D. & Calfe, R. (Eds.), Handbook of educational psychology. New York, Macmillan.

Fuson, K. 1988 Children's counting and concepts of number. Springer-Verlag, New York.

黒木　亨・吉田　甫　1998　子どもの論理を生かした新しい理科授業の創造への試み　宮崎大学教育学部・教育実践研究指導センター紀要，Vol.5, 55-68.

Mack, N.K. 1993 Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research. Hillsdale.

Mayer, R. E. 1985 Mathematical ability. In R. J. Sternberg(Ed.), Human ability: An information-processing approach. NY, Freeman.

Nunes, T., & Bryant, P. 1996 Children doing mathematics. Blackwell

吉田　甫　1991　子どもは数をどのように理解しているのか　新曜社

吉田　甫　1999　認知心理学を基にした新しい算数・数学のカリキュラムの研究と開発，日本数学教育学会，YEARBOOK, 4, 109-127.

Yoshida, H. 1998 A framework for classifying ratio word problems based on both mathematical and semantic structures. Miyazaki University, Research Bulliten, Vol.84, 27-38.

Yoshida, H., & Shinmachi,Y. 1999 The influence of instructional intervention on children's under-standing of fractions, Japanese Psychological Research, Vol.41, 218-228.

吉田　甫・河野康男　1999　割合における構成要素の同定の困難性と問題解決，宮崎大学教育文化学部紀要，Vol.1, 1-9.

吉田　甫・河野康男・横田　浩　2000　割合問題の解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析，宮崎大学教育文化学部紀要，2, 123-133.

（2002. 7. 25．受理）